PART3 母平均の推定

要点 ① 母平均の推定

標本調査の目的は，抽出された標本の性質から，母集団の性質を推測することである。ここでは，母平均がわかっていない母集団から無作為抽出された標本の標本平均を用いて，母平均を推定する。

母平均 m，母分散 σ^2 である母集団から抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布　　　　　　　に従う。よって，

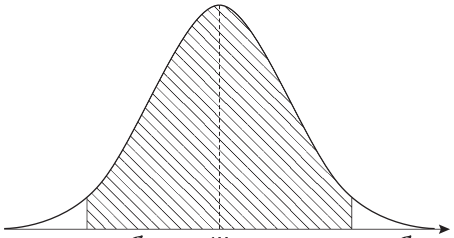
$Z=\dfrac{\overline{X}-\quad}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$P(-u\leqq Z\leqq u)=0.95$ となる u を求めると，正規分布表より $u=$　　　である。よって

$$P\left(-1.96\leqq\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqq 1.96\right)=0.95$$

と表される。この式のかっこの中を変形すると

$$P\left(m-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\overline{X}\leqq m+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$



であり，さらにかっこの中を m の値の範囲として表すと

$$P\left(\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

となる。この式は，区間 $\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ に母平均 m の値を含む確率が約 95％であることを示している。この区間を，母平均 m に対する「　　　　」95％の「　　　　　　」という。

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母平均 m に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めることを，信頼度 95% で推定する，という。

例　ある試験を受けた生徒の中から，100 人を無作為抽出して調査したところ，その平均点は 59.8 点であった。母標準偏差を 13.0 点として，この試験を受けた生徒全体の平均点を，信頼度 95% で推定する。

標本平均は $\overline{X}=59.8$，母標準偏差は $\sigma=13.0$，標本の大きさは $n=100$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$\quad - \quad \leqq m \leqq \quad + $$

$$57.252 \leqq m \leqq 62.348$$

よって，母平均は信頼度 95% で 57.3 点以上 62.3 点以下 と推定される。

標本平均 $\overline{X}$ の値は，抽出される標本ごとに異なるため，実際の母平均の推定においては，標本を抽出して信頼区間を求めることを 1 度だけ行い，その結果を信頼区間として用いる。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の場合，標本を抽出して信頼区間を求めることを多数回くり返すと，その中に母平均 m を含む区間が 95%程度あることが期待される。

母標準偏差 σ がわからないときは，標本の大きさ n が大きければ，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよいことが知られている。

3 ある工場で製造しているある製品から784個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均314.15gであった。母標準偏差を24gとして，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度95%で推定せよ。

Point Pickup

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母標準偏差 σ がわからないときは，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよい。

第10講　PART3 確認問題

1　ある農場で生産した卵の中から400個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均は53.4gであった。母標準偏差を2.5gとして，この農場で生産されている卵の重さの平均を信頼度95%で推定すると，［ア］となる。

［ア］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

①　48.5g以上58.3g以下
②　53.1g以上53.7g以下
③　53.2g以上53.6g以下
④　53.3g以上53.5g以下

PART3 母平均の推定

3 ある工場で製造しているある製品から784個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均314.15gであった。母標準偏差を24gとして，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度95%で推定せよ。

[解答]

標本平均は $\overline{X}=314.15$，母標準偏差は $\sigma=24$，標本の大きさは $n=784$ より，

信頼度95%の信頼区間は

$$314.15-1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}}$$

$$314.15-1.96\cdot\frac{6}{7} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{6}{7}$$

$$312.47 \leqq m \leqq 315.83$$

よって，母平均は信頼度95%で312.47g以上315.83g以下 と推定される。

第10講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③

[解説]

標本平均は $\overline{X}=53.4$，母標準偏差は $\sigma=2.5$，標本の大きさは $n=400$ より，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$53.4-1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}$$ [A]

$$53.4-1.96\cdot\frac{1}{8}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{1}{8}$$

$$53.155\leqq m\leqq 53.645$$

よって，母平均は信頼度95%で **53.2g 以上 53.6g 以下**と推定される。

[A]　母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$